МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
уравнений в частных производных
и теории вероятностей

А.В. Глушко
16.04.2024

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.02.02 Краевые задачи для уравнений эллиптического типа

1. Код и наименование направления подготовки: 01.03.01 Математика

2. Профиль подготовки: Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

3. Квалификация выпускника: Бакалавр

4. Форма обучения: Очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета

6. Составители программы: Рябенко Александр Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент

7. Рекомендована: Научно-методическим советом математического факультета Протокол №0500-03 от 28.03.24

8. Учебный год: 2027/ 2028 Семестр: 7.

9. Цели и задачи учебной дисциплины

Цели изучения дисциплины:

- ознакомление учащихся с современными методами исследования дифференциальных уравнений с частными производными.

Задачи изучения дисциплины:

- формирование и развитие содержательной логики применения вводимых понятий и методов для решения конкретных экспериментальных и прикладных задач;
- развитие навыков применения полученных знаний на практике;
- дать современные теоретические знания в области краевых задач для уравнений эллиптического типа и практические навыки в решении и исследовании основных типов дифференциальных уравнений с частными производными.

10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП: Блок 1; часть, формируемая участниками образовательных отношений; дисциплина по выбору.

Для его успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения по предшествующим дисциплинам: «Алгебра», «Математический анализ», «Комплексный анализ», «Функциональный анализ», «Дифференциальные уравнения», «Уравнения с частными производными», «Доп. главы уравнений с частными производными», «Метод Фурье».

Студент должен свободно владеть математическим анализом, теорией рядов, теорией функций комплексной переменной, элементами линейной алгебры, обладать полными знаниями курсов обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными, знаниями теории интегралов Лебега, теории банаховых и гильбертовых пространств.

Знание методов изучения решений краевых задач для уравнений эллиптического типа является базовым при изучении математических моделей различных физических, химических, биологических, социальных процессов. Кроме того, краевые задачи для уравнений эллиптического типа являются отдельным современным динамически развивающимся разделом математической науки.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-4	Способность к определению целей и задач проводимых исследований, знание отечественного и международного опыта в области знаний уравнений в частных производных и уравнений математической физики, умение использовать отечественный и международный опыт в данной области задач	ПК-4.1	Применяет знания отечественного и международного опыта в области знаний уравнений в частных производных и уравнений математической физики	Знать: как применять знания отечественного и международного опыта в области знаний уравнений в частных производных и уравнений математической физики. Уметь: применять знания отечественного и международного опыта в области знаний уравнений в частных производных и уравнений математической физики. Владеть: методами, позволяющими применять знания отечественного и международного опыта в области знаний уравнений в частных производных и уравнений математической физики.
		ПК-4.2	Анализирует и внедряет отечественный и международный опыт в данной области задач	Знать: как анализировать и внедрять отечественный и международный опыт в данной области задач. Уметь: применять методы анализа и внедрения отечественного и международного опыат в данной области задач.

				Владеть: методами, позволяющими анализировать и внедрять отечественный и международный опыт в данной области задач.
		ПК-4.3	Формирует иерархию основных и второстепенных целей и задач в исследованиях, проводимых в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики.	Знать: как формировать иерархию основных и второстепенных целей и задач в исследованиях, проводимых в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики. Уметь: формировать иерархию основных и второстепенных целей и задач в исследованиях, проводимых в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики. Владеть: методами, позволяющими формировать иерархию основных и второстепенных целей и задач в исследованиях, проводимых в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.— 2 / 72.

Форма промежуточной аттестации: Экзамен – 7 семестр

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
			7 семестр
Контактная работа		28	28
в том числе:	лекции	14	14
	практические	14	14
	лабораторные		
	курсовая работа		
	контрольные работы	1	1
Самостоятельная работа		8	8
Промежуточная аттестация - экзамен		36	36
Итого:		72	72

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
		1. Лекции	
1.1	Предварительные сведения из функционального анализа	1. Банаховы и гильбертовы пространства 2. Линейные ограниченные операторы 3. Образ и ядро оператора 4. Сопряженные операторы. Коядро оператора 5. Теорема Рисса 6. Разложение гильбертова пространства 7. Вполне непрерывные операторы	

1.2	Нетеровские операторы	1. Левые и правые регуляризаторы ограниченного оператора 2. Критерий нетеровости оператора 3. Теоремы о регуляризаторах 4. Теоремы о возмущении нетеровских резуляризаторов 5. Теоремы о произведении нетеровских регуляризаторов	
1.3	Априорные оценки	1. Первая теорема об априорных оценках 2. Вторая теорема об априорных оценках	
2. Практические занятия			
2.1	Функциональные пространства и теоремы вложения	1. Обобщенные производные 2. Соболевские пространства 3. Теоремы вложения	
2.2	Эллиптические дифференциальные операторы	1. Определение и простейшие свойства 2. Теорема Лопатинского и ее следствие	
2.3	Эллиптичность и квазирегуляризаторы	1. Шкала пространств 2. Квазирегуляризаторы 3. Теоремы о квазирегуляризаторах	
2.4	Эллиптичность и априорные оценки	1. Теорема о необходимости эллиптичности для априорных оценок	
3. Лабораторные занятия			
3.1			
3.2			

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Предварительные сведения из функционального анализа	6			8	14
2	Нетеровские операторы	6				6
3	Априорные оценки	2				2
4	Функциональные пространства и теоремы вложения		2			2
5	Эллиптические дифференциальные операторы		4			4
6	Эллиптичность и квазирегуляризаторы		4			4
7	Эллиптичность и априорные оценки		4			4
	Итого:	14	14		8	36

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Преподавание дисциплины заключается в чтении лекций и проведении практических занятий. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Краевые задачи для уравнений эллиптического типа» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения обучающимся рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.
2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникают вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутствующий час преподавателю.
3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.
4. Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке.

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

<u>Методические указания для обучающихся при самостоятельной работе.</u>

Самостоятельная работа обучающихся направлена на самостоятельное освоение всех тем и вопросов учебной дисциплины, предусмотренных программой. Самостоятельная работа является обязательным видом деятельности для каждого обучающегося, ее объем по учебному курсу определяется учебным планом и составляет 8 часов. При самостоятельной работе обучающийся взаимодействует с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя.

Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и ресурсами сети Internet, статистическими данными является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся заинтересованное отношение к конкретной проблеме.

Вопросы, которые вызывают у обучающихся затруднения при подготовке, должны быть заранее сформулированы и озвучены во время занятий в аудитории для дополнительного разъяснения преподавателем.

Виды самостоятельной работы: конспектирование учебной и научной литературы; проработка учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе); работа в электронной библиотечной системе; работа с информационными справочными системами, выполнение домашних заданий (практических и теоретических); выполнение контрольных работ; подготовка к практическим занятиям; работа с вопросами для самопроверки, написание рефератов.

Примерные темы рефератов: Банаховые и Гильбертовы пространства; Линейные ограниченные операторы; Образ и ядро оператора; Сопряженные операторы. Коядро оператора; Теорема Рисса; Разложение Гильбертова пространства; Вполне непрерывные операторы.

Рефераты оцениваются по системе «зачтено» / «не зачтено». Оценка «зачтено» ставится в случае раскрытия предложенной темы, оценка «не зачтено» в случае, если тема не раскрыта.

Все задания, выполняемые студентами самостоятельно, подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Сабитов К.Б. Уравнения математической физики / К.Б. Сабитов . – М.: Физматлит, 2013. – 352 с. // «Университетская библиотека online»: электронно-библиотечная система. – URL: http://biblioclub.ru

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Карчевский М.М. Лекции по уравнениям математической физики / М.М. Карчевский. – СПб: Издательство «Лань», 2016. – 164 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/
2	Глушко А. В. Уравнения математической физики / А. В. Глушко, А. Д. Баев, А. С. Рябенко. – В.: ИПЦВГУ, 2011. – 520 с. – *URL:http://www.kuchp.ru*
3	*Бибиков Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибиков. – СПб: Издательство «Лань», 2021. – 304 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/*
4	*Трухан А. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения и методы их решения. Ряды. Элементы вариационного исчисления: учебное пособие для вузов / А. А. Трухан, Т.В .Огородникова. – СПб: Издательство «Лань», 2020. – 268 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/*
5	Рябенко А. С. Дифференциальные уравнения с параметрами / А. С. Рябенко. – Воронеж: ВГПУ, 2015. – 54 с. – *URL:http://www.kuchp.ru*
6	Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И. И. Привалов. – СПб: Издательство «Лань», 2021. – 432 **с.** // Электронно-библиотечная система «Лань».– URL: https://e.lanbook.com/
7	Власова Е. А. Элементы функционального анализа / Е. А. Власова, И. К. Марчевский. – СПб: Издательство «Лань», 2021. – 400 с. // Электронно-библиотечная система «Лань».– URL: https://e.lanbook.com/
8	Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С. Владимиров, В.П. Михайлов, Михайлова Т.В., Шабунин М.И. – М: Физматлит, 2016. – 512 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/
9	Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – СПб: Издательство «Лань», 2021. – 272 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)***:**

№ п/п	Источник
1	http://eqworld.ipmnet.ru – интернет-портал, посвященный уравнениям и методам их решений
2	http://www.lib.vsu.ru - электронный каталог ЗНБ ВГУ
3	http://www.kuchp.ru – электронный сайт кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, на котором размещены методические издания

4	ЭБС «Университетская библиотека онлайн»
5	ЭБС «Лань»

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Глушко А. В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с. – URL:http://www.kuchp.ru
2	Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С. Владимиров, В.П. Михайлов, Михайлова Т.В., Шабунин М.И. – М: Физматлит, 2016. – 512 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/
3	Рябенко А. С. Дифференциальные уравнения с параметрами / А. С. Рябенко. – Воронеж: ВГПУ, 2015. – 54 с. – URL:http://www.kuchp.ru

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Перечень необходимого программного обеспечения: Microsoft Windows Server 2008, Microsoft Windows 10 Enterprise 64 bit, LibreOffice 6 (*Writer (текстовый процессор), Calc (электронные таблицы), Impress (презентации), Draw (векторная графика), Base (база данных), Math (редактор формул)*), Maxima, Total Commander, WinDjView, Foxit Reader, 7-Zip, Mozilla Firefox.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины: Учебная аудитория для проведения занятий лекционного и семинарского типа, текущего контроля и промежуточной аттестации (394018, г. Воронеж, площадь Университетская, д. 1, пом. I). Специализированная мебель.

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Предварительные сведения из функционального анализа	ПК-4	ПК-4.1, ПК-4.2, ПК-4.3.	Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену
2	Нетеровские операторы	ПК-4	ПК-4.1, ПК-4.2, ПК-4.3.	Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену
3	Априорные оценки	ПК-4	ПК-4.1, ПК-4.2, ПК-4.3.	Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену
4	Функциональные пространства и теоремы вложения	ПК-4	ПК-4.1, ПК-4.2, ПК-4.3.	Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену
5	Эллиптические дифференциальные операторы	ПК-4	ПК-4.1, ПК-4.2, ПК-4.3.	Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену
6	Эллиптичность и квазирегуляризаторы	ПК-4	ПК-4.1, ПК-4.2, ПК-4.3.	Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену
7	Эллиптичность и априорные оценки	ПК-4	ПК-4.1, ПК-4.2, ПК-4.3.	Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену
Промежуточная аттестация форма контроля - Экзамен				Перечень вопросов к экзамену

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Примерный перечень тестовых заданий

1. Банаховым пространством называется

а) нормированное пространство, б) пространство со скалярным произведением,
в) нормированное пространство, в котором всякая фундаментальная последовательность сходится.

2. Пусть X – банахово пространство. Сопряженным к пространству X называется

а) множество непрерывных функционалов над пространством X,
б) множество линейных функционалов над пространством X,
в) множество линейных и непрерывных функционалов над пространством X.

3. Пусть X и Y – гильбертовы пространства, $A: X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, $R: Y \to X$ – линейный ограниченный оператор. Оператор R называется левым регуляризатором оператора A если

а) $RA = I$, б) $RA = I + T$, где T – вполне непрерывный оператор,
в) $RA = T$, где T – вполне непрерывный оператор.

4. Является ли пространство $L_2(\Omega)$ гильбертовым?

а) да. б) нет.

5. Линейный дифференциальный оператор $A(x, \dfrac{\partial}{\partial x}) = \sum_{|\alpha| \le s} a_\alpha(x) (\dfrac{\partial}{\partial x})^\alpha$ называется эллиптическим в точке x если его характеристический многочлен $\overset{\circ}{A}(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = s} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ не обращается в нуль

а) при некоторых ξ отличных от нуля,
б) при всех ξ отличных от нуля,
в) при всех ξ.

6. Пусть $x \in \mathbb{R}^2$, $A(x, \dfrac{\partial}{\partial x})$ – дифференциальный оператор второго порядка. Может ли оператор $A(x, \dfrac{\partial}{\partial x})$ быть эллиптическим?

а) да. б) нет.

7. Гильбертовым пространством называется

а) пространство со скалярным произведением, б) полное пространство,
в) полное пространство со скалярным произведением.

8. Пусть X – гильбертово пространство. Можно ли пространство X^* (сопряженное к пространству X) отожествить с пространством X?

а) да. б) нет.

9. Пусть X и Y – гильбертовы пространства, $A: X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, $R: Y \to X$ – линейный ограниченный оператор. Оператор R называется правым регуляризатором оператора A если

а) $AR = I$, б) $AR = I + T$, где T – вполне непрерывный оператор,
в) $AR = T$, где T – вполне непрерывный оператор.

10. Норма функции $u(x)$ в пространстве $L_p(\Omega)$ задается формулой

а) $(\int\limits_\Omega \left| \dfrac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha} \right|^p dx)^{1/p}$, б) $\int\limits_\Omega \left| \dfrac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha} \right|^p dx$, $\int\limits_\Omega \left| \dfrac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha} \right| dx$.

11. Пусть $x \in \mathbb{R}^2$. Является ли оператор $A(x, \frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}$ эллиптическим?

а) да. б) нет.

12. Пусть $x \in \mathbb{R}^2$, $A(x, \frac{\partial}{\partial x})$ – дифференциальный оператор третьего порядка. Может ли оператор $A(x, \frac{\partial}{\partial x})$ быть эллиптическим?

а) да. б) нет.

13. Пусть X и Y – нормированные пространства, $A: X \to Y$ – линейный оператор, заданный на всем пространстве X. Оператор A называется непрерывным если

а) $x \to x_0$ при $Ax \to Ax_0$, б) $Ax \to Ax_0$ при $x \to x_0$.

14. Пусть X – гильбертово пространство, $A: X \to X$ – линейный ограниченный оператор. Оператор $A^*: X \to X$ будет сопряженным к оператору A если для любых $x, y \in X$

а) $(Ax, y) = (x, A^*y)$, б) $(Ax, y) = (A^*x, y)$, в) $(Ax, A^*y) = (x, y)$.

15. Пусть X и Y – гильбертовы пространства, $A: X \to Y$ – линейный ограниченный оператор. Существование у оператора A левого и правого регуляризатора является

а) необходимым условием нетеровости оператора A,

б) достаточным условием нетеровости оператора A,

в) необходимым и достаточным условием нетеровости оператора A.

16. Является ли пространство $W_p^k(\Omega)$ банаховым?

а) да. б) нет.

17. Пусть $x \in \mathbb{R}^2$. Является ли оператор $A(x, \frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}$ эллиптическим?

а) да. б) нет.

18. Пусть X_α совокупность банаховых пространств, зависящих от индекса α. Говорят, что совокупность пространств X_α образует шкалу пространств если из того что $\alpha' > \alpha''$ следует, что

а) пространство $X_{\alpha'}$ вложено в пространство $X_{\alpha''}$,

б) пространство $X_{\alpha''}$ вложено в пространство $X_{\alpha'}$.

19. Пусть X и Y – нормированные пространства, $A: X \to Y$ – линейный оператор, заданный на всем пространстве X. Оператор A называется ограниченным, если существует такая константа c, что для любого $x \in X$ выполнена оценка

а) $\|Ax\| \le c\|x\|$, б) $\|Ax\| > c\|x\|$.

20. Коядром оператора A называется

а) ядро оператора A^*, б) ядро оператора $I - A$, в) ядро оператора A^{**}.

21. Пусть X и Y – гильбертовы пространства, $A: X \to Y$ – нетеровский оператор, $T: X \to Y$ – вполне непрерывный оператор, тогда оператор $A + T$

а) нетеровский, б) не нетеровский.

22. Является ли пространство $W_2^k(\Omega)$ гильбертовым?

а) да. б) нет.

23. Пусть $x, \xi \in \mathbb{R}^2$. Чему равен характеристический многочлен оператора $A(x, \frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}$?

а) $\xi_1 + \xi_2$. б) $\xi_1 \cdot \xi_2$. в) $\xi_1 - \xi_2$.

24. Пусть задана шкала пространств X_α . Оператор T называется сглаживающим если он переводит пространство из шкалы в пространство

а) с большим индексом, б) с меньшим индексом.

25. Пусть X и Y – нормированные пространства, $A: X \to Y$ – линейный ограниченный оператор. Являются ли эквивалентными понятия линейного ограниченного и линейного непрерывного оператора?

а) да. б) нет.

26. Пусть X – нормированное пространство. Множество M из X называется компактным если из каждой последовательности $x_n \subset M$ можно выделить

а) ограниченную подпоследовательность,
б) сходящуюся в M подпоследовательность,
в) фундаментальную подпоследовательность.

27. Пусть X и Y – гильбертовы пространства, $A: X \to Y$ – нетеровский оператор, $T: X \to Y$ – вполне непрерывный оператор, $\chi(A)$ – индекс оператора A, а $\chi(A+T)$ – индекс оператора $A+T$, тогда

а) $\chi(A) = -\chi(A+T)$, б) $\chi(A) = \chi(A+T)$.

28. Норма функции $u(x)$ в пространстве $W_p^k(\Omega)$ задается формулой

а) $(\sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega \left| \frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha} \right|^p dx)^{1/p}$, б) $\sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega \left| \frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha} \right|^p dx$, в) $(\int_\Omega \left| \frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha} \right|^p dx)^{1/k}$.

29. Пусть $x, \xi \in \mathbb{R}^2$. Чему равен характеристический многочлен оператора $A(x, \frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}$?

а) $i\xi_1 + \xi_2$. б) $\xi_1 + i\xi_2$. в) $\xi_1^2 + i\xi_2$.

30. Пусть задана шкала пространств X_α , $A: X_\alpha \to X_{\alpha'}$ – линейный ограниченный оператор, $R: X_{\alpha'} \to X_\alpha$ – линейный ограниченный оператор, T_α – сглаживающий оператор. Оператор R называется левым квазирегуляризатором оператора A если

а) $RA = I$, б) $RA = I + T_\alpha$, в) $RA = T_\alpha$.

31. Пусть X и Y – нормированные пространства, $A: X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, тогда $\|A\|$ равна

а) $\inf\limits_{\substack{x\in X,\\ x\ne 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, б) $\sup\limits_{\substack{x\in X,\\ x\ne 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

32. Пусть X – нормированное пространство. Множество M из X называется предкомпактным если из каждой последовательности $x_n \subset M$ можно выделить

а) ограниченную подпоследовательность,
б) сходящуюся в M подпоследовательность,
в) фундаментальную подпоследовательность.

33. Пусть X и Y – гильбертовы пространства, $A: X \to Y$ – нетеровский оператор, $R: Y \to X$ – любой регуляризатор оператора A, $B: X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, тогда оператор $A+B$ будет нетеровский если

а) $\|R\| + \|B\| < \|A\|$, б) $\|R\| \cdot \|B\| < 1$, в) $\|R\| + \|B\| < 1$.

34. Пространством $C^k(\bar{\Omega})$ обозначается множество

а) непрерывных в Ω функций,
б) k раз непрерывно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ функций,
в) k раз дифференцируемых в Ω функций.

35. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Является ли дифференциальный оператор $A(x, \frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ эллиптическим?

а) да. б) нет.

36. Пусть задана шкала пространств X_α, $A: X_\alpha \to X_{\alpha'}$ – линейный ограниченный оператор, $R: X_{\alpha'} \to X_\alpha$ – линейный ограниченный оператор, $T_{\alpha'}$ – сглаживающий оператор. Оператор R называется правым квазирегуляризатором оператора A если

а) $AR = I$, б) $AR = I + T_{\alpha'}$, в) $AR = T_{\alpha'}$.

37. Пусть X – вещественное гильбертово пространство. Будет ли для произвольных $x, y \in X$ выполнено равенство

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2 ?$$

а) да. б) нет.

38. Пусть X – банахово пространство. Является ли компактное множество ограниченным?

а) да. б) нет.

39. Пусть X и Y – гильбертовы пространства, $A: X \to Y$ – нетеровский оператор, $R: Y \to X$ – любой регуляризатор оператора A, $B: X \to Y$ – линейный ограниченный оператор и $\|R\| \cdot \|B\| < 1$, тогда индексы операторов A и $A + B$

а) совпадают, б) не совпадают.

40. Является ли пространство $C^k(\bar{\Omega})$ банаховым?

а) да. б) нет.

41. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Чему равен характеристический многочлен оператора $A(x, \frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$?

а) $\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \ldots \cdot \xi_n$. б) $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$. в) $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2$.

42. Линейный эллиптический дифференциальный оператор порядка s с постоянными коэффициентами как непрерывный оператор из $H_l(\mathbb{R}^n)$ в $H_{l-s}(\mathbb{R}^n)$ имеет при любом вещественном l

а) левый квазирегуляризатор,
б) правый квазирегуляризатор,
в) как левый, так и правый квазирегуляризатор.

43. Пусть X – вещественное гильбертово пространство. Будет ли для произвольных $x, y \in X$ выполнено равенство

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) ?$$

а) да. б) нет.

44. Пусть X – банахово пространство. Является ли предкомпактное множество ограниченным?

а) да. б) нет.

45. Пусть X и Y – гильбертовы пространства, $A: X \to Y$ – нетеровский оператор, $B: Y \to Z$ – нетеровский оператор, тогда оператор $BA: X \to Z$ будет

а) нетеровским, б) не нетеровским.

46. Является ли пространство $C^k(\bar{\Omega})$ гильбертовым?

а) да. б) нет.

47. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $A(x, \frac{\partial}{\partial x})$ – линейный дифференциальный оператор порядка s, тогда

а) коэффициенты при некоторых двух из следующих производных

$\frac{\partial^s}{\partial x_1^s}, \frac{\partial^s}{\partial x_2^s}, ..., \frac{\partial^s}{\partial x_n^s}$ отличен от нуля,

б) коэффициент хотя бы при одной из следующих производных

$\frac{\partial^s}{\partial x_1^s}, \frac{\partial^s}{\partial x_2^s}, ..., \frac{\partial^s}{\partial x_n^s}$ отличен от нуля,

в) коэффициенты при $\frac{\partial^s}{\partial x_1^s}, \frac{\partial^s}{\partial x_2^s}, ..., \frac{\partial^s}{\partial x_n^s}$ отличны от нуля.

48. Пусть $A(x, \frac{\partial}{\partial x})$ – линейный дифференциальный оператор порядка s, $\overset{\circ}{A}(x, \frac{\partial}{\partial x})$ – старшая часть оператора $A(x, \frac{\partial}{\partial x})$. Если оператор $\overset{\circ}{A}(x, \frac{\partial}{\partial x})$, как непрерывный оператор из $H_l(\mathbb{R}^n)$ в $H_{l-s}(\mathbb{R}^n)$, имеет при любом вещественном l левый квазирегуляризатор R, не зависящий от l, то оператор R

а) будет левым квазирегуляризатором оператора $A(x, \frac{\partial}{\partial x})$,

б) не будет левым квазирегуляризатором оператора $A(x, \frac{\partial}{\partial x})$.

49. Пусть X – вещественное гильбертово пространство. Будет ли для произвольных $x, y \in X$ выполнено неравенство

$$|(x,y)| \le \|x\| \|y\|?$$

а) да. б) нет.

50. Пусть X и Y – банаховые пространства, $A: X \to Y$ – линейный ограниченный оператор. Оператор A называется вполне непрерывным если всякое ограниченное множество он переводит в

а) ограниченное множество, б) компактное множество,

в) предкомпактное множество.

51. Пусть X и Y – гильбертовы пространства, $A: X \to Y$ – нетеровский оператор, $B: Y \to Z$ – нетеровский оператор, $\chi(A)$, $\chi(B)$, $\chi(BA)$ индексы операторов A, B, BA, тогда

а) $\chi(BA) = \chi(A) + \chi(B)$, б) $\chi(BA) = \chi(B) - \chi(A)$, в) $\chi(BA) = \chi(A) - \chi(B)$,

г) $\chi(BA) = \chi(A) = \chi(B)$.

52. Норма функции $u(x)$ в пространстве $C^k(\bar{\Omega})$ задается формулой

а) $\sum\limits_{|\alpha| \le k} \max\limits_{x \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha} \right|$, б) $\sum\limits_{|\alpha| \le k} \left| \frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha} \right|$, в) $\max\limits_{x \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right|$.

53. Пусть $x \in \mathbb{R}^2$. Является ли оператор

$$A(x, \frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}$$

эллиптическим?

а) да. б) нет.

54. Пусть $A(x, \frac{\partial}{\partial x})$ – линейный дифференциальный оператор порядка s, $\overset{\circ}{A}(x, \frac{\partial}{\partial x})$ – старшая часть оператора $A(x, \frac{\partial}{\partial x})$. Если оператор $\overset{\circ}{A}(x, \frac{\partial}{\partial x})$, как непрерывный оператор из $H_l(\mathbb{R}^n)$ в $H_{l-s}(\mathbb{R}^n)$, имеет при любом вещественном l правый квазирегуляризатор R, не зависящий от l, то оператор R

а) будет правым квазирегуляризатором оператора $A(x, \frac{\partial}{\partial x})$, б) не будет правым квазирегуляризатором оператора $A(x, \dfrac{\partial}{\partial x})$.

55. Пусть X и Y – нормированные пространства, $A: X \to Y$ – линейный оператор, заданный на всем пространстве X. Ядром оператора A называется множество всех $x \in X$ таких, что

а) $Ax = x$, б) $Ax = 0$, в) $A^2 x = 0$.

56. Пусть X и Y – гильбертовы пространства, $A: X \to Y$ – линейный ограниченный оператор. Оператор A является нетеровским если $\operatorname{Im} A$ замкнуто в Y и

а) размерность ядра оператора A больше размерности коядра оператора A,

б) размерность ядра оператора A меньше размерности коядра оператора A,

в) размерность ядра и коядра оператора A конечны.

57. Пусть X и Y – нормированные пространства. Говорят, что пространство X вложено в пространство Y если $X \subset Y$ и существует такая константа c, что при всех $x \in X$

а) $\|x\|_Y \le c\|x\|_X$, б) $\|x\|_Y > c\|x\|_X$.

58. Пусть Ω это ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Если функция $u(x)$ принадлежит пространству $W_p^k(\Omega)$ и $k > k_1 + \dfrac{n}{p}$, то функция $u(x)$ принадлежит пространству $C^{k_1}(\bar{\Omega})$ и будет выполнена оценка

а) $\|u\|_{C^{k_1}(\bar{\Omega})} > \tilde{n}\|u\|_{W_p^k(\Omega)}$, б) $\|u\|_{C^{k_1}(\bar{\Omega})} \le \tilde{n}\|u\|_{W_p^k(\Omega)}$.

59. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $n \ge 3$, $A(x, \dfrac{\partial}{\partial x})$ – эллиптический дифференциальный оператор, $\overset{\circ}{A}(x,\xi) = \overset{\circ}{A}(x,\xi',\xi_n)$ – характеристический многочлен оператора $A(x, \dfrac{\partial}{\partial x})$. Имеет ли при $\xi' \ne 0$ уравнение (относительно ξ_n)

$$\overset{\circ}{A}(x,\xi',\xi_n) = 0$$

вещественные корни?

а) да. б) нет.

60. Пусть U – некоторая окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $A(x, \dfrac{\partial}{\partial x})$ – линейный дифференциальный оператор порядка s и для всех $u(x) \in H_l(\mathbb{R}^n)$ таких, что $\operatorname{supp} u(x) \subset U$ справедлива оценка

$$\|u\|_{H_l(\mathbb{R}^n)} \le c(\|Au\|_{H_{l-s}(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{H_{l-1}(\mathbb{R}^n)}),$$

тогда оператор $A(x, \dfrac{\partial}{\partial x})$

а) эллиптичен в точке x_0, б) не эллиптичен в точке x_0.

61. Пусть X – вещественное гильбертово пространство, $f(x)$ – линейный ограниченный функционал заданный на всем X, тогда

а) не существует $y \in X$ такого, что для любого $x \in X$

$$f(x) = (x, y),$$

б) существует единственный $y \in X$ такой, что для любого $x \in X$

$$f(x) = (x, y),$$

в) существует не единственный $y \in X$ такой, что для любого $x \in X$ $f(x) = (x, y)$.

62. Пусть A – нетеровский оператор, $\alpha(A) = \dim \ker A$, $\beta(A) = \dim Co\ker A$, тогда $\chi(A)$ – индекс оператора A вычисляется по формуле

а) $\alpha(A) - \beta(A)$, б) $\alpha(A) + \beta(A)$, в) $\beta(A) - \alpha(A)$.

63. Пусть X и Y – банаховы пространства пространства, $A: X \to Y$ – линейный ограниченный оператор и существует константа c такая, что для всех $x \in X$ выполнена оценка

$$\|x\| \le c\|Ax\|,$$

тогда

а) оператор A не имеет ядра, б) ядро оператора A конечномерно,
в) ядро оператора A бесконечномерно.

64. Пусть задан дифференциальный оператор $A(x, \dfrac{\partial}{\partial x}) = \sum\limits_{|\alpha| \le s} a_\alpha(x)(\dfrac{\partial}{\partial x})^\alpha$. Старшей частью оператора $A(x, \dfrac{\partial}{\partial x})$ называется оператор

а) $\sum\limits_{|\alpha|=s-1} a_\alpha(x)(\dfrac{\partial}{\partial x})^\alpha$, б) $\sum\limits_{|\alpha|<s} a_\alpha(x)(\dfrac{\partial}{\partial x})^\alpha$, в) $\sum\limits_{|\alpha|=s} a_\alpha(x)(\dfrac{\partial}{\partial x})^\alpha$.

65. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $n \ge 3$, $A(x, \dfrac{\partial}{\partial x})$ – эллиптический дифференциальный оператор, $\overset{\circ}{A}(x,\xi) = \overset{\circ}{A}(x,\xi',\xi_n)$ – характеристический многочлен оператора $A(x, \dfrac{\partial}{\partial x})$. Имеет ли при $\xi' \ne 0$ уравнение (относительно ξ_n)

$$\overset{\circ}{A}(x,\xi',\xi_n) = 0$$

только комплексные корни?

а) да. б) нет.

66. Пусть U – некоторая окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $A(x, \dfrac{\partial}{\partial x})$ – линейный дифференциальный оператор порядка s и для всех $u(x) \in H_l(\mathbb{R}^n)$ таких, что $\operatorname{supp} u(x) \subset U$ справедлива оценка

$$\|u\|_{H_l(\mathbb{R}^n)} \le c(\|Au\|_{H_{l-s}(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{H_{l-1}(\mathbb{R}^n)}),$$

тогда оператор $A(x, \dfrac{\partial}{\partial x})$

а) эллиптичен в точке x_0, б) не эллиптичен в точке x_0.

67. Пусть X – вещественное гильбертово пространство, $x, y \in X$. Выполнение равенства $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$ является

а) необходимым условием ортогональности x и y,
б) необходимым и достаточным условием ортогональности x и y,
в) достаточным условием ортогональности x и y.

68. Пусть A – нетеровский оператор. Верно ли утверждение, что оператор A^* так же будет нетеровским?

а) да. б) нет.

69. Пусть X и Y – банаховы пространства пространства, $A: X \to Y$ – линейный ограниченный оператор и существует константа c такая, что для всех $x \in X$ выполнена оценка

$$\|x\| \le c\|Ax\|,$$

тогда

а) $\operatorname{Im} A$ замкнуто, б) $\operatorname{Im} A$ незамкнуто.

70. Пусть $x \in \mathbb{R}^2$ и задан дифференциальный оператор

$$A(x, \frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Старшей частью оператора $A(x,\frac{\partial}{\partial x})$ будет

а) $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial}{\partial x_1}$, б) $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$, в) $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

71. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $A(x,\frac{\partial}{\partial x})$ – эллиптический дифференциальный оператор, $\overset{\circ}{A}(x,\xi)=\overset{\circ}{A}(x,\xi',\xi_n)$ – характеристический многочлен оператора $A(x,\frac{\partial}{\partial x})$, тогда при $\xi' \neq 0$ корни уравнения (уравнение относительно ξ_n)

$$\overset{\circ}{A}(x,\xi',\xi_n)=0$$

а) все расположены в верхней комплексной полуплоскости,

б) все расположены в нижней комплексной полуплоскости,

в) поровну распределены в верхней и нижней комплексных полуплоскостях.

72. Пусть X – гильбертово пространство, L – линейное многообразие в X. Ортогональным дополнением к L называется

а) множество содержащее L,

б) произвольный конечный набор элементов из X ортогональных к L,

в) совокупность всех элементов из X ортогональных к L.

73. Пусть A – нетеровский оператор, $\chi(A)$ – индекс оператора A, $\chi(A^*)$ – индекс оператора A^*, тогда

а) $\chi(A)=\chi(A^*)$, б) $\chi(A)=-\chi(A^*)$, в) $\chi(A)=2\chi(A^*)>0$.

74. Пусть X, X_0, Y – банаховы пространства, пространство X вполне непрерывно вложено в пространство X_0, $A: X \to Y$ – линейный непрерывный оператор и существует константа c такая, что для всех $x \in X$ выполнена оценка

$$\|x\|_X \leq c(\|Ax\|_Y+\|x\|_{X_0}),$$

тогда

а) оператор A не имеет ядра, б) ядро оператора A конечномерно,

в) ядро оператора A бесконечномерно.

75. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $A(x,\frac{\partial}{\partial x})=\sum\limits_{|\alpha|\leq s} a_\alpha(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha$. Характеристическим многочленом оператора $A(x,\frac{\partial}{\partial x})$ называется многочлен

а) $\sum\limits_{|\alpha|\leq s} a_\alpha(x)\xi^\alpha$, б) $\sum\limits_{|\alpha|=s} a_\alpha(x)\xi^\alpha$.

76. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $A(x,\frac{\partial}{\partial x})$ – дифференциальный оператор третьего порядка. Может ли оператор $A(x,\frac{\partial}{\partial x})$ быть эллиптическим?

а) да. б) нет.

77. Пусть X – гильбертово пространство, L – линейное многообразие в X. Верно ли, что ортогональное дополнение к L будет подпространством в X?

а) да. б) нет.

78. Пусть A – нетеровский оператор, $\alpha(A)=\dim\ker A$, тогда $\alpha(A)$ равно

а) числу линейно независимых решений уравнения

$$Ax=0,$$

б) числу линейно независимых условий необходимых и достаточных для разрешимости неоднородного уравнения

$$Ax=y.$$

79. Пусть X, X_0, Y – банаховы пространства, пространство X вполне непрерывно вложено в пространство X_0, $A: X \to Y$ – линейный непрерывный оператор и существует константа c такая, что для всех $x \in X$ выполнена оценка

$$\|x\|_X \le c(\|Ax\|_Y + \|x\|_{X_0}),$$

тогда

а) $\operatorname{Im} A$ замкнуто, б) $\operatorname{Im} A$ незамкнуто.

80. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $A(x, \dfrac{\partial}{\partial x}) = \sum\limits_{|\alpha| \le s} a_\alpha(x)(\dfrac{\partial}{\partial x})^\alpha$, а $\overset{\circ}{A}(x,\xi) = \sum\limits_{|\alpha|=s} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ – характеристический многочлен оператора $A(x, \dfrac{\partial}{\partial x})$. Будет ли многочлен $\overset{\circ}{A}(x,\xi)$ однородным?

а) да. б) нет.

81. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $n \ge 3$, $A(x, \dfrac{\partial}{\partial x})$ – дифференциальный оператор четвертого порядка. Может ли оператор $A(x, \dfrac{\partial}{\partial x})$ быть эллиптическим?

а) да. б) нет.

82. Пусть X – гильбертово пространство, L – подпространство в X, тогда для любого $z \in X$

а) найдутся $x \in L$, $y \in L^\perp$ такие, что $z = x + y$,

б) найдутся единственные $x \in L$, $y \in L^\perp$ такие, что $z = x + y$,

в) не найдутся $x \in L$, $y \in L^\perp$ такие, что $z = x + y$.

83. Пусть A – нетеровский оператор, $\beta(A) = \dim Co\ker A$, тогда $\beta(A)$ равно

а) числу линейно независимых решений уравнения

$$Ax = 0,$$

б) числу линейно независимых условий необходимых и достаточных для разрешимости неоднородного уравнения

$$Ax = y.$$

84. Является ли пространство $L_p(\Omega)$ банаховым?

а) да. б) нет.

85. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $A(x, \dfrac{\partial}{\partial x}) = \sum\limits_{|\alpha| \le s} a_\alpha(x)(\dfrac{\partial}{\partial x})^\alpha$, а $\overset{\circ}{A}(x,\xi) = \sum\limits_{|\alpha|=s} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ – характеристический многочлен оператора $A(x, \dfrac{\partial}{\partial x})$. Многочлен $\overset{\circ}{A}(x,\xi)$ будет однородным степени

а) 2, б) $s-2$, в) s, г) $s-1$.

86. Пусть $x \in \mathbb{R}^2$, $A(x, \dfrac{\partial}{\partial x})$ – дифференциальный оператор первого порядка. Может ли оператор $A(x, \dfrac{\partial}{\partial x})$ быть эллиптическим?

а) да. б) нет.

Примерный перечень задач для контрольной работы

1. Доказать критерий нетеровости.
2. Доказать теорему о возмущении нетерого оператора вполне непрерывным оператором.
3. Доказать, что любой регуляризатор нетеровского оператора сам является нетеровским оператором.
4. Доказать теорему о возмущении нетеровского оператора оператором малым по норме.
5. Доказать первую теорему об априорных оценках.

6. Доказать вторую теорему об априорных оценках.

7. Доказать теорему о существовании квазирегуляризаторов у линейного однородного эллиптического оператора.

8. Доказать теорему о необходимости эллиптичности для априорных оценок.

9. Доказать теорему Лопатинского.

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

К основным формам текущего контроля можно отнести устный опрос, проверку домашних заданий, тестовые задания, контрольные работы.

В ходе тестовых заданий обучающемуся выдается КИМ с тестовыми заданиями, если тестовое задание проводится в дистанционной форме, то КИМ размещаются в системе «Электронный университет». КИМ тестового задания содержат шесть заданий. На написание тестового задания отводится 30 минут. Тестовое задание оценивается в формате «зачтено» и «не зачтено». Для получения «зачтено» в тестовом задании нужно верно ответить на четыре задания. «Не зачтено» выставляется в том случае, если ответ обучающегося не удовлетворяет критериям ответа на «зачтено».

В ходе контрольной работы обучающемуся выдается КИМ с практическими заданиями, если контрольная проводится в дистанционной форме, то КИМ размещаются в системе «Электронный университет». КИМ контрольной содержат два задания. На написание контрольной работы отводится 90 минут. Контрольная работа оценивается в формате «зачтено» и «не зачтено». Для получения «зачтено» в контрольной работе нужно верно выполнить одно задание. «Не зачтено» выставляется в том случае, если ответ обучающегося не удовлетворяет критериям ответа на «зачтено».

20.2. Промежуточная аттестация

Перечень вопросов к экзамену

1. Банаховы и гильбертовы пространства.
2. Линейные ограниченные операторы.
3. Образ и ядро оператора.
4. Сопряженные операторы. Коядро оператора.
5. Теорема Рисса.
6. Разложение гильбертова пространства.
7. Вполне непрерывные операторы.
8. Левые и правые регуляризаторы ограниченного оператора.
9. Критерий нетеровости оператора.
10. Теоремы о регуляризаторах.
11. Теоремы о возмущении нетеровских резуляризаторов.
12. Теоремы о произведении нетеровских регуляризаторов.
13. Первая теорема об априорных оценках.
14. Вторая теорема об априорных оценках.
15. Обобщенные производные.
16. Соболевские пространства.
17. Теоремы вложения.
18. Определение и простейшие свойства эллиптического дифференциального оператора.
19. Теорема Лопатинского и ее следствие.
20. Шкала пространств.
21. Квазирегуляризаторы.
22. Теоремы о квазирегуляризаторах.
23. Теорема о необходимости эллиптичности для априорных оценок.

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины «Краевые задачи для уравнений эллиптического типа» в форме экзамена.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра и может завершать изучение как отдельной дисциплины, так и ее разделов. Промежуточная аттестация помогает оценить более крупные совокупности знаний и умений, в некоторых случаях даже формирование определенных профессиональных компетенций.

На экзамене оценивается уровень освоении учебной дисциплины и степень сформированности компетенций оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно».

В ходе экзамена обучающемуся выдается КИМ с практическими заданиями, если экзамен проводится в дистанционной форме, то КИМ размещаются в системе «Электронный университет». КИМ экзамена содержат три вопроса. На написание экзамена отводится 150 минут. «Отлично» выставляется при правильном ответе на три вопроса КИМ, «хорошо» выставляется при правильном ответе на два вопроса КИМ, «удовлетворительно» выставляется при правильном ответе на один вопрос КИМ, «неудовлетворительно» выставляется, если обучающийся неверно ответил на все вопросы КИМ.

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно) **Test1-5**:

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

Test1

1. Банаховым пространством называется

а) нормированное пространство, б) пространство со скалярным произведением,

в) нормированное пространство, в котором всякая фундаментальная последовательность сходится.

Ответ: в).

Test2

Пусть X и Y – гильбертовы пространства, $A: X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, $R: Y \to X$ – линейный ограниченный оператор. Оператор R называется левым регуляризатором оператора A если

а) $RA = I$, б) $RA = I + T$, где T – вполне непрерывный оператор,

в) $RA = T$, где T – вполне непрерывный оператор.

Ответ: б).

Test3

Пусть X – банахово пространство. Сопряженным к пространству X называется

а) множество непрерывных функционалов над пространством X,

б) множество линейных функционалов над пространством X,

в) множество линейных и непрерывных функционалов над пространством X.

Ответ: в).

Test4

Пусть X – вещественное гильбертово пространство. Будет ли для произвольных $x, y \in X$ выполнено неравенство

$$|(x,y)| \le \|x\|\|y\|?$$

а) да. б) нет

Ответ: а).

Test5

Линейный дифференциальный оператор $A(x,\frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{|\alpha|\le s} a_\alpha(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha$ называется эллиптическим в точке x если его характеристический многочлен $\overset{\circ}{A}(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=s} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ не обращается в нуль

а) при некоторых ξ отличных от нуля,

б) при всех ξ отличных от нуля,

в) при всех ξ.

Ответ: б).

Задания открытого типа (короткий текст): **!Task6-10**

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

!Task6 **Вставьте пропущенное слово или закончите определение**

Пусть X и Y – нормированные пространства, $A: X \to Y$ – линейный оператор, заданный на всем пространстве X и существует такая константа c, что для любого $x \in X$ выполнена оценка $\|Ax\| \le c\|x\|$. Тогда оператор A называется …..

.!Ответ

Ограниченным

!Task7

Пусть X и Y – гильбертовы пространства, $A: X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, $R: Y \to X$ – линейный ограниченный оператор и $AR = I + T$, где T – вполне непрерывный оператор. Тогда оператор R называется ……… регуляризатором оператора A.

!Ответ

правым

!Task8

Пространство $C^k(\bar{\Omega})$ является …… пространством.

!Ответ

Банаховым, нормированным

!Task9

Пусть X и Y – нормированные пространства, $A: X \to Y$ – линейный оператор, заданный на всем пространстве X. Множество всех $x \in X$ таких, что $Ax = 0$ называется ……. оператора A.

!Ответ

ядром

!Task10

Пусть $x \in \mathbb{R}^3$ и задан дифференциальный оператор $A(x, \frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$. Этот оператор является оператором …….. типа.

!Ответ

Эллиптического

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).